LICEO SCIENTIFICO "A. RIGHI"
A.S. 2007-08

II PROVA D'ESAME: MATEMATICA

SIMULAZIONE

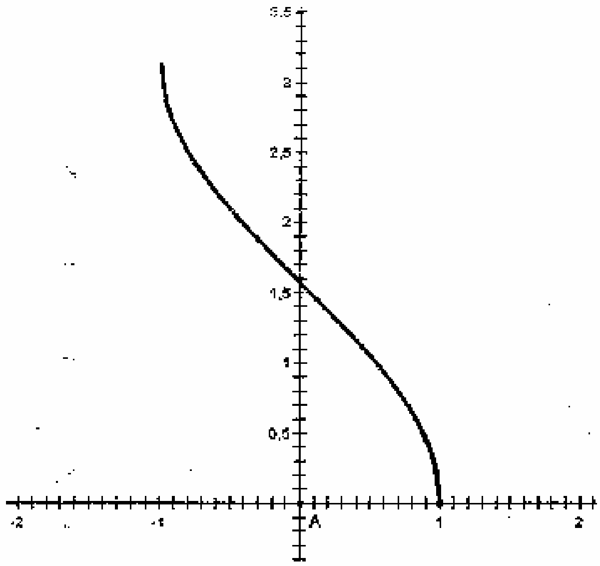
Il candidato risolva, a sua scelta, uno dei seguenti problemi e dia le risposte a cinque quesiti del questionario:

Problemi

1. Studiare la funzione $f(x)=1-\frac{\sqrt{4x-x^2}}{2}$.
   a. Verificare che la retta di equazione x=2 è asse di simmetria per il grafico della funzione.
   b. Determinare la funzione F primitiva di f e con F(0)=0 (suggerimento: è possibile applicare la sostituzione $x=2(1-\cos t)$ con $t\in[0,\pi]$).
   c. Verificare che la parabola di equazione $x=-2(2\sqrt{3}+3)y^2+\sqrt{3}-\frac{1}{2}$ è tangente al grafico della funzione f in un punto di ascissa 1.
   d. Determinare l'area della figura delimitata dal grafico di f, dalla parabola e dagli assi coordinati.
2. Determinare i parametri a e b in modo che la funzione di espressione analitica $y=a\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)+b\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right)$ abbia un massimo in P(1,2) e un flesso in Q(4,0).
   a. Disegnarne il grafico.
   b. Scrivere l'equazione della retta tangente t_Q nel flesso Q.
   c. Determinare l'area della figura delimitata dalla tangente al grafico nel punto P, da t_Q e dal grafico della funzione.
   d. Interpretare x come il tempo e y come la velocità di un corpo puntiforme. Descrivere la posizione e l'accelerazione del moto.
   e. Determinare in quali istanti il moto è accelerato o decelerato.

Quesiti

1. Considerare la funzione f il cui grafico è rappresentato in figura. Disegnare il grafico della funzione derivata f' giustificando la risposta. Disegnare il grafico della funzione primitiva F che ha F(0)=0 giustificando la risposta.



2. Indicare con f una funzione definita in un intervallo [a,b], derivabile su]a,b[e invertibile. Mostrare che se $x_0 \in]a,b[$ e f^{-1} è la funzione inversa, allora
$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{-1}\right)'\left(f(x_0)\right)}.$$
3. Spiegare cos'è un punto di flesso per una curva. Descrivere analiticamente un esempio di funzione il cui grafico ha un flesso orizzontale, un esempio di funzione il cui grafico ha un flesso obliquo, un esempio di funzione il cui grafico ha un flesso verticale.
4. Verificare analiticamente che il punto $S\left(-\frac{1}{2},0\right)$ è centro di simmetria del grafico della funzione $y = \frac{4x^2+4x+2}{2x+1}$ e spiegare in base a quale metodo sia possibile eseguire tale verifica.
5. Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ illustrando i presupposti teorici che permettono di eseguire questo calcolo.
6. Disegnare il grafico di una funzione reale definita sull'intervallo (0; 1) che sia sempre negativa ed abbia negative la derivata prima e la derivata seconda. (Facoltativo) Scrivere l'equazione di una tale funzione.
7. Illustrare una applicazione alla fisica del concetto di integrale.
8. Mostrare che fra tutti i cilindri iscritti in un cono circolare retto ha volume massimo quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono.
9. Applicare la formula d'integrazione per parti per calcolare l'integrale definito:
$$\int_0^1 e^x (x^2 + x + 1)\,dx$$
10. Mostrare, senza risolverla, che l'equazione $2x^3 + 3x^2 + 6x + 12 = 0$ ammette una e una sola radice reale.

La durata della prova è di 6 ore e nel corso di essa è consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla consegna della copia con le tracce.