LICEO SCIENTIFICO "A. RIGHI" – BOLOGNA
23 maggio 2007

SIMULAZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI MATEMATICA
PER L'ESAME DI STATO 2006-2007

Il candidato svolga ***un problema tra i due proposti e cinque quesiti*** *tra i dieci proposti.*

– Problemi –

Problema 1:

Si consideri la funzione

$$y = \frac{8x}{x^2 - 10x + 16} \qquad (1)$$

a) Studiare l'andamento della funzione e tracciarne il grafico.

b) Una retta $y = t$ incontra, per opportuni valori di t da determinare, la curva (1) in due punti A e B: dimostrare che il prodotto delle loro ascisse è costante al variare di t.

c) Si riconosca che il punto medio del segmento AB descrive, al variare di t, l'iperbole equilatera di equazione $y = \frac{4}{x-5}$, che passa per i punti di massimo e di minimo della (1).

d) Indicati con C il punto di tale iperbole, di ascissa 6, con D un suo punto di ascissa $z > 6$, e dette C' e D' le proiezioni ortogonali di C e D sull'asse delle x, si determini l'area S del trapezoide $CC'D'D$ e, successivamente, il valore di z per il quale $S = 4$.

Problema 2:

Si consideri un cono circoscritto ad una sfera di raggio r e sia x la semiapertura del cono.

a) Determinare, in funzione di r e di x, la superficie laterale S_1 del cono, la superficie laterale S_2 del cilindro avente base e altezza uguali a quelle del cono e l'area di base S_3 del cilindro.

b) Determinare il minimo della funzione $f(x) = \frac{S_1}{S_2 + S_3}$.

c) Tracciare il grafico di $f(x)$ indipendentemente dai limiti geometrici del problema.

d) In corrispondenza del punto di minimo di $f(x)$ calcolare la capacità in litri del cono e del cilindro nell'ipotesi di $r = 0{,}25$ m.

La durata della prova è di 6 ore e nel corso di essa è consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili. Non è ammesso lasciare l'aula prima delle 12.15.

- *QUESTIONARIO* -

1. Date le curve di equazioni rispettive: $y=\frac{3}{x^2-1}-\frac{5}{3}$ e $y=\frac{3}{4(2-x^2)}+\frac{31}{8}$;

   dopo aver trovato le equazioni delle tangenti nel punto P di ascissa 2 della prima e nel punto Q della seconda, avente la stessa ascissa, verificare che le rette trovate sono perpendicolari tra loro e s'incontrano in un punto di Oy.

2. Dopo aver tracciato i grafici delle funzioni: $y=\frac{x^4}{2}-\frac{5}{2}x^2+2$ e $y=1-x^2$

   Calcolare l'area S complessiva delle parti di piano comprese dagli archi delle due curve, che hanno gli estremi nelle loro intersezioni.

3. Determinare, se esistono, le ascisse dei punti della seguente funzione, definita nell'intervallo indicato a lato, che verificano il teorema di Lagrange.

$$y=\ln\left|\frac{x}{x^2-1}\right| \qquad \text{in} \qquad \left[-\frac{1}{2};3\right]$$

4. Data la funzione $y=a^2sen^2x$ dimostrare che il suo valor medio nell'intervallo $[0;2\pi]$ è uguale alla metà di uno dei suoi massimi relativi.

5. Verificare che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-senx}{x+senx}=1$ dopo aver constatato l'inapplicabilità della regola di L'H$\hat{o}$pital.

6. Si consideri la funzione $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b+1 & per \quad x<0 \\ bx\cdot 2^{2x+2}+a & per \quad x\geq 0\end{cases}$

   A quali condizioni devono soddisfare i parametri reali a e b affinché f(x) sia continua nell'origine (e di conseguenza su tutto **R**)? Determinare a e b in modo che f sia ovunque derivabile.

7. E' data la funzione $y=\frac{1}{\ln(e-x)}$ si determini il dominio naturale di f e si risolva l'equazione f(x)=2. Calcolare l'angolo che il grafico cartesiano di f forma con l'asse delle ordinate nel loro punto d'intersezione.

8. Si dimostri che la perpendicolare, condotta da un vertice di un tetraedro regolare al piano di base, passa per il baricentro di questa.

9. Un resistore da 100 KΩ in serie con un condensatore di 20 μF viene collegato a un generatore di 50 V. Si calcoli la potenza dissipata dal resistore immediatamente dopo il collegamento, dopo 1 secondo, dopo 10 secondi e in condizioni stazionarie (cioè dopo un tempo molto lungo).

10. Sia $\{a_n\}$ una successione numerica tale che

$$a_1=4 \text{ e } 3\cdot a_{n+1}=a_n+2 \text{ con } n\geq 1$$

   sia $\{b_n\}$ una successione numerica tale che $b_n=a_n-1$. Mostrare che $\{b_n\}$ è una progressione geometrica: determinare il primo termine e la ragione q.

La durata della prova è di 6 ore e nel corso di essa è consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili. Non è ammesso lasciare l'aula prima delle 12.15.