LICEO SCIENTIFICO "A. RIGHI" – BOLOGNA
19 maggio 2006

SIMULAZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI MATEMATICA
PER L'ESAME DI STATO 2005-2006

Il candidato svolga un problema tra i due proposti e cinque quesiti tra i dieci proposti.

Problema n 1

E' data la Funzione $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

1) ***Studiarne il dominio e il segno al variare di a.***

2) ***Dimostrare che il grafico della curva di equazione y = ƒ(x) è simmetrico rispetto al punto di intersezione con l'asse y.***

3) ***Dimostrare che la funzione ƒ(x) è sempre crescente, pertanto invertibile e determinare la funzione inversa*** $x = f^{-1}(y)$.

4) ***Dopo aver dimostrato che per a≠ 0 la funzione non ha asintoti (per l'asintoto obliquo applicare la regola de l'Hospital) e che ha un flesso per x=0, tracciare il grafico di y = ƒ(x) nel caso in cui a = e (base dei logaritmi naturali).***

5) ***Mediante la derivata di ƒ (x) calcolare l'integrale***

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Soluzione

1) per a=0 il dominio della funzione è] 0 , +∞ [infatti per valori negativi della x l'argomento del logaritmo risulta 0 mentre per valori positivi l'argomento è 2x, positivo.

Per a ≠ 0 il dominio della funzione è l'intero insieme dei numeri reali infatti il radicale sarà sempre maggiore di x pertanto l'argomento del logaritmo sarà sempre positivo.

Lo studio del segno della funzione richiede di risolvere la disequazione ƒ(x)>0, equivalente a

$\sqrt{x^2 + a^2} > 1 - x$ disequazione a sua volta equivalente all'unione delle soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} 1 - x < 0 \\ \forall x \end{cases} \quad V \quad \begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^2 + a^2 > (1 - x)^2 \end{cases}$$

che risolti danno come soluzioni complessiva $x > (1-a^2)/2$.
Pertanto lo schema di segno è:

- - - - - $(1-a^2)/2$ + + + + +

2) Il punto di intersezione con l'asse y è B(0, ln|a|) , per dimostrare quanto richiesto basta provare che il punto medio tra i punti A(x f(x)) e A'(-x, f(-x)) è il punto B. Questo si dimostra facilmente: Sia M il punto medio tra A e A'.

$$M\left(\frac{x-x}{2},\frac{f(x)+f(-x)}{2}\right)=\left(0,\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+\ln(-x+\sqrt{-x+a^2}}{2}\right)=\left(0,\frac{\ln(-x^2+x^2+a^2)}{2}\right)=(0,\ln|a|)$$

Per dimostrare la crescenza della funzione calcoliamo la derivata prima che risulta

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}})=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

evidentemente sempre positiva per a non nullo.

Per calcolare la funzione inversa si risolve in x l'equazione

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$$
$$e^y=x+\sqrt{x^2+a^2}$$
$$e^y-x=\sqrt{x^2+a^2}$$
$$e^{2y}-2xe^y+x^2=x^2+a^2$$
$$x=\frac{e^{2y}-a}{2e^y}=\frac{e^y-a^2e^{-y}}{2}$$

4) Asintoti verticali non ce ne sono a parte il caso a=0 che è escluso. Per gli altri tipi di asintoti si osserva che

$$\lim_{x\to\pm\infty}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})=\pm\infty$$

pertanto non ci sono asintoti orizzontali

mentre, applicando il teorema di de l'Hospital

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}}{1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}=0$$

pertanto non ci sono asintoti obliqui

per la ricerca del flesso calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x)=\frac{0\sqrt{x^2+a^2}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x^2+a^2}=\frac{-2x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dal segno della f'' si ha che la funzione ha concavità rivolta verso l'alto per x<0 e, rivolta verso il basso per x>0 mentre per x=0 c'è un flesso.

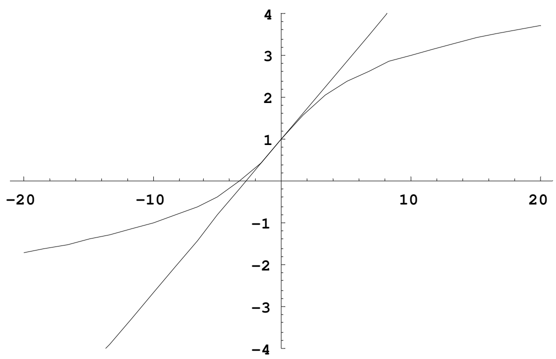
Il coefficiente angolare della tangente inflessionale sarà

$$f''(0)=\frac{1}{|a|}$$

che è sempre positiva, pertanto il flesso sarà ascendente con tangente data dalla retta di equazione

x - |a| y + |a| ln|a| = 0 che, nel caso a=e diventa

y = 1 + x/e



5) Per calcolare l'integrale, come indicato nella traccia si utilizza la derivata della funzione, già calcolata

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\left[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right]_0^2=\ln(2+\sqrt{4+a^2})-\ln|a|$$

Problema n 2

Nella circonferenza di centro O e raggio r è inscritto un quadrilatero ABCD; si sa che AB è uguale al lato del triangolo equilatero inscritto mentre CD è uguale al lato dell'esagono regolare inscritto alla circonferenza.

1) ***Posto COB=2x esprimere il perimetro di ABCD in funzioni di x e rappresentarlo.***

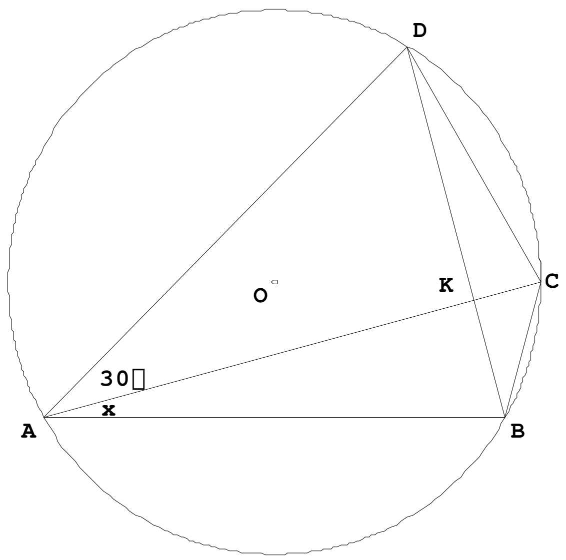
2) ***Dimostrare che AC è perpendicolare a BD.***

3) ***Ruotare il triangolo BCD intorno a BD ed esprimere in funzione di x l'area della superficie totale y del solido così ottenuto.***

4) ***Dopo aver verificato che l'area y è data da πr^2 (sen x + 2 sen^2 x), rappresentare y(x) nell'intervallo [0,2π] ponendo*** $r = \frac{1}{\sqrt{\Pi}}$.

5) ***Calcolare infine l'area della parte di piano racchiusa tra l'asse x, il grafico della y(x) e la retta di equazione x = π.***

1)



Essendo AB uguale al lato del triangolo equilatero inscritto sarà $AB = r\sqrt{3}$ e l'angolo ADB = 60° perché insiste su un lato del triangolo equilatero

Essendo CD uguale al lato dell'esagono regolare inscritto sarà $CD = r$ e gli angoli CAB = BDC=30°

Rimangono da calcolare le lunghezza di BC e DA che si determinano facilmente applicando il teorema della corda infatti

BC= 2r senx essendo l'angolo x alla circonferenza che insiste sulla corda BC.

DA= 2r sen (ABD) = 2r sen (180- (60°+x+ 30)) = 2r cos x.

Pertanto il perimetro del quadrilatero sarà

$2p = 2r(1+\sqrt{3}+\text{sen}\,x+\cos x)$ con la condizione $0 \le x \le \pi/2$

Per la rappresentazione nell'intervallo indicato osserviamo che la funzione è sempre positiva essendo $1+\sqrt{3} > 2$. calcoliamo la derivata prima e seconda:

$y' = r(2\cos x - 2\,\text{sen}\,x)$

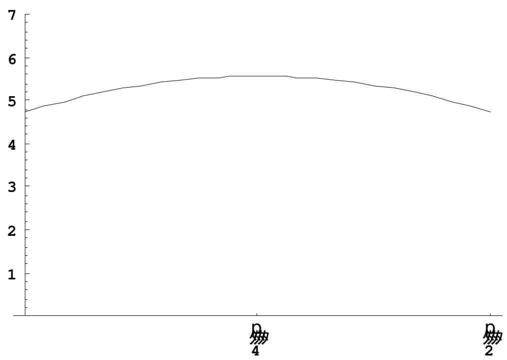
$y'' = 2r(-\text{sen}\,x - \cos x)$

Dallo studio del loro segno si deduce che la funzione è crescente per $0<x<\pi/4$ e decrescente per $\pi/4<x<\pi$. Pertanto il massimo sarà per $x=\pi/4$. inoltre:

$y(0) = r(1+\sqrt{3})$ minimo

$y(\pi/4) = r(1+\sqrt{3}+2\sqrt{2})$ massimo

$y(\pi/2)=r(1+\sqrt{3})$ minimo.



2) Per dimostrare che le rette AC e BD sono perpendicolari basta osservare che il triangolo AKD è un triangolo con due angoli di 30° e 60° pertanto il terzo angolo è retto.

3) L'angolo DBC= 30° perché insiste sul lato dell'esagono regolare pertanto il triangolo che dobbiamo ruotare ha un angolo di 30° e il lato opposto è r. Si ottiene una figura di rotazione formata da due coni aventi la base in comune.

L'altezza del triangolo BCD relativa alla base DB, ovvero il raggio di base del doppio cono sarà: KC=BC sen 30° = 2r senx sen 30°= r sen x.

Mentre le altezze dei due coni sono:
KB=BC cos 30°= 2r sen xcos 30°= √3 r sen x

Mentre DK si calcola mediante il teorema di Pitagora applicato al triangolo CKD:
$$DK = \sqrt{r^2 - KC^2} = \sqrt{r^2 - r^2 sen^2 x} = r\cos x$$

pertanto la superficie totale della figura sarà:
$$S = \frac{1}{2} 2\pi r \,\text{sen}\, x(r + 2r\,\text{sen}\, x) = \pi r^2 (\text{sen}\, x + 2\,\text{sen}^2\, x)$$

4) Con la posizione indicata la funzione da studiare è

y = senx + 2 sen^{2}x nell'intervallo [0, 2π]

Studio del segno:
y = senx (1 + 2 sen x)

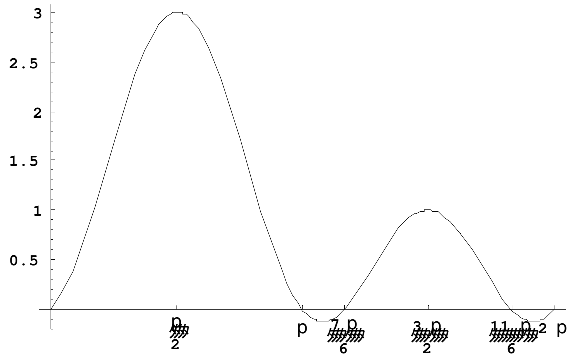
	0		π/2		π		7π/6		3π/2		11π/6		2π
sen x	|	+	|	+	|	-	|	-	|	-	|	-	|
1+2 sen x	|	+	|	+	|	+	|	-	|	-	|	+	|
y		**+**		**+**		**-**		**+**		**+**		**-**	

Studio della derivata prima
y'= cos x(1+4 sen x)

	0		π/2		π		π+arcsen(1/4)		3π/2		2π-arcsen(1/4)		2π
cos x	|	+	|	-	|	-	|	-	|	+	|	+	|
1+4 sen x	|	+	|	+	|	+	|	-	|	-	|	+	|
y'		↑	∩	↓		↓	∪	↑	∩	↓	∪	↑	

pertanto i massimi e i minimi sono :

Massimo per x=π/2 y(π/2) = 3
minimo per x=π+ arcsen(1/4) y(π+arcsen(1/4)) = -1/8
Massimo per x=3π/2 y(3π/2)= 1
Minimo per x=2π-arcsen(1/4) y(2π-arcsen(1/4) = -1/8



5) L'area della parte di piano racchiusa tra l'asse x, il grafico nell'intervallo [0,π] è dato dall'integrale:

$$\int_0^{\pi}(senx+2sen^2x)dx=\int_0^{\pi}senxdx+2\int_0^{\pi}sen^2xdx=$$

$$=\int_0^{\pi}senxdx+2\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=[-\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}dx-\int_0^{\pi}\cos 2x=$$

$$-\cos\pi+\cos 0+\pi-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2xd(2x)=1+1+\pi-\frac{1}{2}[sen2x]_0^{\pi}=$$

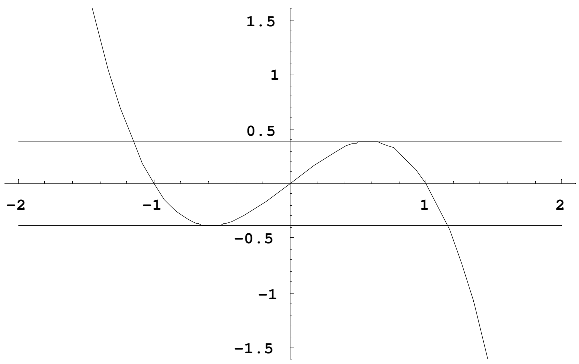
$$2+\pi-\frac{1}{2}[sen2\pi-sen0]=2+\pi$$

- *QUESTIONARIO* -

1. ***Data la cubica y = f(x) = x^3 – x + k, dimostrare che essa ammette almeno uno zero $\forall k\in$ R. Determinare poi per quali valori del parametro k la funzione ammette soltanto uno zero.***

Per dimostrare che la funzione ammette almeno uno zero è sufficiente osservare che la funzione è continua e inoltre i limiti per x tendente a $\pm\infty$ sono $\pm\infty$ pertanto la funzione deve passare per lo zero.
Per fare uno studio più approfondito e valutare al variare del parametro il numero delle soluzioni dell'equazione f(x) = 0 si pone y = x- x^3
Pertanto le soluzioni dell'equazioni corrispondono a quelle del sistema { y = k ; y = x - x^3 }
Che corrisponde geometricamente a studiare le intersezioni di una cubica fissa e un fascio di rette parallele all'asse x. Tracciamo quindi il grafico della cubica che possiede un massimo e un minimo.

$$Max(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{9})$$
$$\min(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{9})$$



che ci permette di discutere il numero delle soluzioni al variare di k.

per $k<-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ una soluzione positiva

per $k=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ una soluzione positiva e due negative coincidenti

per $-\frac{2\sqrt{3}}{9}<k<\frac{2\sqrt{3}}{9}$ tre soluzioni distinte

per $k=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ una soluzione negativa e due positive coincidenti

per $k>\frac{2\sqrt{3}}{9}$ una soluzione negativa

2. ***Applicando il teorema di De L'Hospital calcolare*** $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x sentdt}{x^2}$.

Soluzione
Per calcolare la derivata della funzione al numeratore basta ricordare che la derivata della funzione integrale è la funzione stessa pertanto il limite dato è uguale al limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{2x}=\frac{1}{2}$$

3. ***Studiare continuità e derivabilità della funzione***

y=f(x)= $\begin{cases} x^2-2x+4 & x\le 0 \\ |2x-4| & x>0 \end{cases}$

Verificare poi se è possibile applicare il Teorema di Lagrange alla funzione y=f(x) nell'intervallo [-6;1] e trovare gli eventuali punti che soddisfano il teorema.

Soluzione

Studio della continuità: ciascuna delle due parti sono certamente continue, basta studiare la continuità nel punto di incollatura: x=0, dove entrambe le espressioni assumono il valore 4. Pertanto si può affermare che la funzione è continua per tutti i valori di R.

Studio della derivabilità: Calcoliamo la derivata della funzione:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & per\ x<0 \\ -2 & per\ 0<x<2 \\ 2 & per\ x>2 \end{cases}$$

Rimangono da studiare i due punti singolari x = 0, x = 2 per i quali calcoliamo le derivate destre e sinistre:

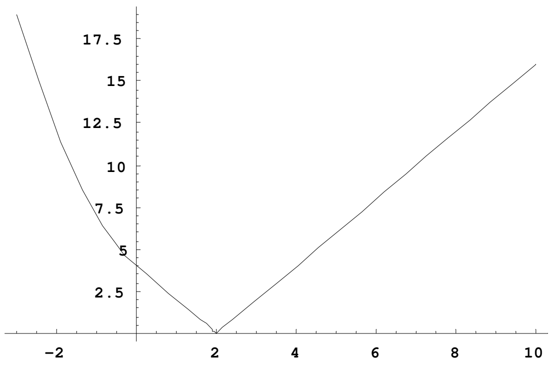
$$\lim_{x->0-} f'(x) = -2\ ;\ \lim_{x->0+} f'(x) = -2$$

pertanto nel punto x=0 la funzione è derivabile con derivata uguale a -2

$$\lim_{x->2-} f'(x) = -2\ ;\ \lim_{x->2+} f'(x) = 2$$

Essendo diverse la derivata destra e sinistra, la funzione non è derivabile per x=2.

Pur non essendo richiesto tracciamo il grafico della funzione dove si nota che per x =0 le due curve si raccordano mentre per x=2 si ha un punto angoloso.



Per quanto riguarda l'applicabilità del teorema di Lagrange nell'intervallo [-6,1] calcoliamo il rapporto

$$\frac{f(1)-f(-6)}{1-(-6)} = \frac{2-52}{7} = -\frac{50}{7}$$

cerchiamo ora un valore di x per cui la derivata sia –50/7 risolvendo la semplice equazione

$$2x-2=-\frac{50}{7}$$

che ha come soluzione x = -18/7. che appartiene all'intervallo considerato.
Possiamo quindi affermare che le ipotesi del teorema di Lagrange sono è soddisfatte perché nell'intervallo [-6.1] la funzione è continua e derivabile nel duo interno, e il punto che soddisfa la tesi è -18/7.

4. ***Data la funzione y=f(x)= x + a +*** $\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}$ ***, determinare a, b, c in modo che il grafico della funzione abbia un punto estremo relativo in x = 1 e un flesso in F(-1;*** $3/5$ ***). Quale tipo di flesso c'è in F? Determinare l'equazione della tangente inflessionale.***

Soluzione;
Le condizioni richieste sono tre: punto estremo, ascissa e ordinata del flesso, queste tre condizioni ci permettono di ottenere tre equazioni nelle tre incognite a,b,c. Scriviamo le equazioni:

$f'(1) = 0$; $f''(-1) = 0$; $f(-1) = 3/5$;

Calcoliamo le derivate prima e seconda della funzione

$$f'(x)=1-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}$$
$$f''(x)=\frac{2b}{x^3}+\frac{6c}{x^4}$$

le condizioni date si traducono le sistema:

$$\begin{cases} f'(1)=1-b-2c=0 \\ f''(-1)=-2b+6c=0 \\ f(-1)=-1+a-b+c=\frac{3}{5} \end{cases}$$

che ha come soluzione : a=2; b=3/5; c=1/5.

Pertanto la funzione cercata è:
$$f(x)=x+2+\frac{3}{5x}+\frac{1}{5x^2}$$

per calcolare la tangente inflessionale calcoliamo la derivata prima nel punto di flesso:

$$f'(x) = 1 - \frac{3}{5x^2} - \frac{2}{5x^3}$$

$$f'(-1) = 1 - \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

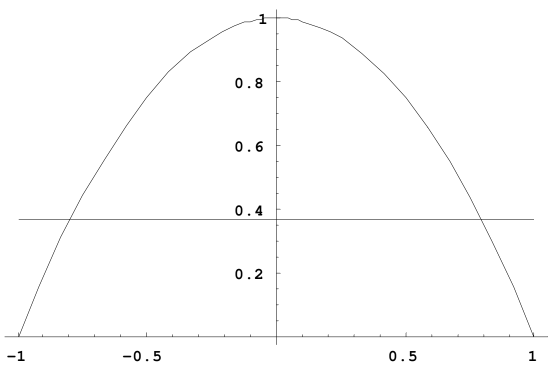
pertanto la tangente inflessionale sarà:

$$y - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}(x+1)$$
$$y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5}$$

5. ***Determinare l'equazione della retta parallela all'asse x che divide in due parti equivalenti la regione di piano delimitata dall'asse x e dalla curva y= - x^2 +1.***

Per dimezzare l'area del segmento parabolico individuato dalla parabola e dall'asse x intersechiamo la parabola con la retta generica y = k parallela all'asse x , cerchiamo i punti di intersezione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = k \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$$



che ci fornisce i punti di intersezione
$A(-\sqrt{1-k}, k) \quad B(\sqrt{1-k}, k)$
infine imponiamo che l'area della parte del segmento parabolico soprastante la retta y=k sia uguale alla metà dell'area dell'intero segmento parabolico.

$$\int_{-\sqrt{1-k}}^{\sqrt{1-k}} (1-x^2-k)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$$

calcolando gli integrali si ottiene:

$$\left[x-\frac{x^3}{3}-kx\right]_{-\sqrt{1-k}}^{\sqrt{1-k}} = \frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$

$$2\sqrt{1-k}-\frac{2(1-k)\sqrt{1-k}}{3}-2k\sqrt{1-k} = \frac{1}{2}2(1-\frac{1}{3})$$

equazione che risolta in k ha come soluzione

$$k = 1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

pertanto l'equazione della retta parallela all'asse x è

$$y = 1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

Si osserva, che per la simmetria della figura rispetto all'asse y era sufficiente considerare le aree del primo quadrante.

6. ***Una particella si muove lungo una retta con la legge oraria s(t) = te^{-t}, con $t \geq 0$. Determinare in quale istante la particella raggiunge la distanza massima dal punto di partenza e quanto vale tale distanza. In quali istanti la particella acquista la velocità minima e massima?***

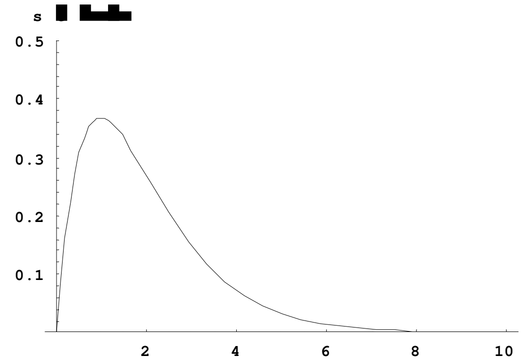
Sapendo che la velocità è la derivata dello spazio e l'accelerazione la derivata della velocità calcoliamo

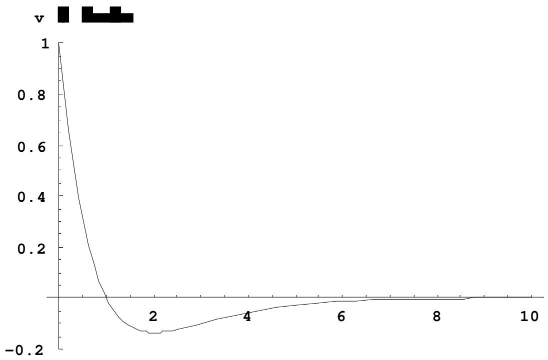
$$v(t) = e^{-t(1-t)}$$
$$a(t) = e^{-t}(t-2)$$

da cui si deduce che la velocità massima si ha quando v = 0 e a < 0 cioè per t = 1 mentre la velocità minima si ha all'istante iniziale quando è zero.
La velocità massima si ha nell'istante iniziale mentre la minima per t = 2 dove a = 0. Inoltre essendo a(t) positiva per t >2 la velocità è ivi crescente e inoltre è limitata da 0, infatti calcoliamo il limite per t tendente all'infinito, applicando la regola di De l'Hospital:

$$\lim_{t->+\infty} v(t) = \lim_{t->+\infty} e^{-t}(t-2) = \lim_{t->+\infty} \frac{t-2}{e^t} = \lim_{t->+\infty} \frac{1}{e^t} = 0 .$$

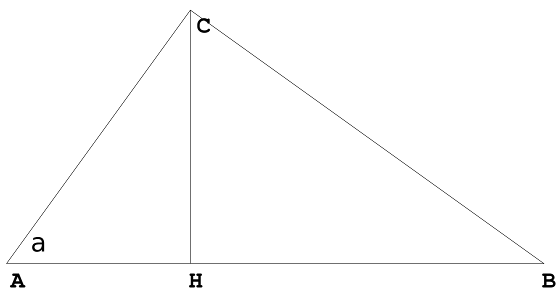
Anche se non richieste espressamente presentiamo le rappresentazioni grafiche dello spazio e della velocità in funzione del tempo:





7. ***Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione di un triangolo con lati di misure 2u, 3u e 4u attorno alla retta passante per il lato di lunghezza maggiore.***

Per calcolare il volume del solido formato dalla rotazione del triangolo intorno al lato maggiore
È necessario determinare l'altezza h relativa al lato maggiore per far questo si può determinare un angolo alla base per mezzo del teorema di Carnot:



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\ AC \cos\alpha$

9=16+4-2 4 2 cos α

da cui si ricava cos α=11/16

$$\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{121}{256}}=\sqrt{\frac{135}{256}}$$

pertanto il volume del solido di rotazione formato da due coni aventi base in comune a e altezza totale uguale al lato maggiore AB=4 è data da:

$$V=\frac{\pi h^2}{3}AB=\frac{\pi(AC\operatorname{sen}\alpha)^2}{3}AB=\frac{45\pi}{16}$$

8. ***Nella circonferenza di diametro AB = 2r si tracci la corda MN perpendicolare ad AB e si conduca per il punto A, perpendicolarmente al piano della stessa circonferenza, il segmento AP = a. Posto $M\hat{A}N$ = 2x, determinare il massimo volume della piramide PAMN.***

Osservato che la piramide ha altezza costante, il volume massimo della piramide si ha quando è massima l'are da base.
La base è formata da un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza avente per angolo al vertice l'angolo 2x.
L'area di detto triangolo si può calcolare per via trigonometrica:
I lati uguali AM=AN=2 rcosx
Altezza AH=2rcos^{2}x
Base MN=2AM sen x = 4r cosx senx pertanto l'area è
Per 0<x<90°
Area= MN AH/2 = 4r senx cosx 2r cos^{2}x/2 = 4r^2 sen x cos^{3}x

Calcoliamo la derivata che, semplificata risulta

Area= 4r^{2}cos^{2}x(cos^{2}x-3sen^{2}x)= 4r^{2}cos^{2}x(4cos^{2}x-3)

Analizzando il segno limitatamente al primo quadrante risulta
positiva per $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$
negativa per $0<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$
pertanto il massimo si ha per x=30°.

9. ***Sia y = f(x) una funzione due volte derivabile per x = 0 tale che f(0) = f'(0) = 1 e f''(0) = 0. Calcolare la derivata seconda di y=*** $e^{3f(x)}$ ***in x = 0.***

Calcoliamo la derivata prima e seconda della funzione applicando la regola di derivazione delle funzioni composte riconducendoci poi ai dati forniti dalla traccia.

$y' = e^{3f(x)}\, 3\, f'(x)$
$y'' = e^{3f(x)}\, (9\, f'(x)^2 + 3\, f''(x))$
pertanto $y''(0) = e^3\, 9 = 9\, e^3$

10. Una funzione reale y =f(x) continua in R soddisfa le condizioni:

$$\int_0^1 f(x)dx = 3 \quad \textbf{\textit{e}} \quad \int_0^3 f(x)dx = -4$$

Calcolare il valore di $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx$ ***e*** $\displaystyle\int_0^3 f(\frac{x}{3})dx$.

Soluzione:
gli integrali richiesti possono essere calcolati a partire da quelli dati

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_0^3 f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx = -4 - 3 = -7$$

per calcolare il secondo integrale è sufficiente fare un cambiamento di variabile:

$$\frac{x}{3} = t \quad dx = 3dt$$

pertanto:

$$\int_{x=0}^{x=3} f(\frac{x}{3})dx = \int_{t=0}^{t=1} f(t)3dt = 9$$