LICEO SCIENTIFICO "A. RIGHI" – BOLOGNA
27 maggio 2005

SIMULAZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI MATEMATICA
PER L'ESAME DI STATO 2004-2005

Il candidato svolga un problema tra i due proposti e cinque quesiti tra i dieci proposti.

- Problemi -

Problema 1 :

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln|x| - 2x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$,

a) determinare a in modo che sia continua $\forall x \in \Re$

b) Stabilito che questo si verifica per $a = 0$, tracciare il grafico, studiando la funzione

c) Determinare e classificare gli eventuali punti di non derivabilità e scrivere le equazioni delle rette tangenti nei punti di intersezione con gli assi cartesiani

d) Determinare la misura della superficie S della porzione limitata di piano compresa tra la curva, l'asse x e le rette di equazione $x = e^2$ e $x = k$, con $0 < k < e^2$ Calcolare poi $\lim_{k \to 0} S$

Problema 2 :

Siano γ una circonferenza di centro *O* e raggio *r*, *A* un punto esterno ad essa tale che $\overline{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{3} r$ ed *s* una secante condotta da *A* a γ. Sia H il punto medio della corda intercettata su γ dalla secante.

a) Si calcoli, in funzione dell'angolo $x = O\hat{A}H$, il volume *V(x)* del cono, che si ottiene ruotando il triangolo $A\overset{\Delta}{H}O$ attorno alla retta *OH.*

b) Si calcolino i valori dell'angolo x per cui *V*(x) è massimo.

c) Si studi la funzione *V*(*x*) nei limiti geometrici del problema.

d) Si discuta il problema della determinazione dei valori di *x* per cui *V*(x) assume un assegnato valore *k* reale positivo.

La durata della prova è di 6 ore e nel corso di essa è consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla consegna della copia con le tracce.

QUESTIONARIO -

1. Verificare che la funzione $y = senx + x - 4$ ammette un solo zero, determinandolo in modo approssimato e calcolare l'area compresa tra il grafico della funzione e gli assi cartesiani.

2. Rappresentare graficamente la legge del moto oscillatorio di una particella espressa dalla funzione $s = sent + \cos t$ ove t indica il tempo (considerare per semplicità $t \geq 0$). Determinare la relazione che lega la velocità v istantanea al tempo t e individuare infine l'istante in cui viene raggiunta la velocità massima.

3. Per quali valori di c il polinomio $p(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ ha due minimi ? Per quali valori ha due punti di flesso? Per quali nessuno? Come cambia il grafico quando c decresce?

4. Trovare il volume massimo di un cono circolare inscritto in una sfera di raggio r.

5. Per quali valori di *a* e *b* la funzione $f(x) = axe^{bx^2}$ ha il valore massimo $f(2) = 1$?

6. Verificare che in una parabola la tangente in suo punto è l'asse del segmento congiungente il fuoco e il piede della perpendicolare condotta dal punto di tangenza alla direttrice.

7. Determinare il valor medio della funzione $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 4}$ nell'intervallo compreso fra l'ascissa x_0 del suo punto estremante e l'ascissa $x_0 + \sqrt{3}$.

8. Stabilire i valori di a e di b per i quali la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 - ax^2 & x \leq 1 \\ 2 + x & 1 < x \leq 2 \\ bx^2 - 4 & x > 2 \end{cases}$ è continua e derivabile in tutti i punti del suo dominio.

9. Analizzare la natura della discontinuità della seguente funzione : $y = \dfrac{e^{2x} + e^x - 2}{e^x - 1}$

10. Trovare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di 180° un'ellisse di semiassi a e b attorno all'asse minore. (supporre che la lunghezza del semiasse minore sia b).

La durata della prova è di 6 ore e nel corso di essa è consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla consegna della copia con le tracce.