

LICEO SCIENTIFICO "A. RIGHI" – BOLOGNA
27 maggio 2005

SIMULAZIONE DELLA PROVA SCRITTA DI MATEMATICA sez P.N.I.
PER L'ESAME DI STATO 2004-2005

Il candidato svolga un problema tra i due proposti e cinque quesiti tra i dieci proposti.

- Problemi -

Problema 1 :

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln|x| - 2x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$,

- a) determinare a in modo che sia continua $\forall x \in \mathfrak{R}$
- b) Stabilito che questo si verifica per $a = 0$, tracciare il grafico, studiando la funzione
- c) Determinare e classificare gli eventuali punti di non derivabilità e scrivere le equazioni delle rette tangenti nei punti di intersezione con gli assi cartesiani
- d) Determinare la misura della superficie S della porzione limitata di piano compresa tra la curva, l'asse x e le rette di equazione $x = e^2$ e $x = k$, con $0 < k < e^2$ Calcolare poi $\lim_{k \rightarrow 0} S$

Problema 2 :

Siano γ una circonferenza di centro O e raggio r , A un punto esterno ad essa tale che $\overline{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$ ed s una secante condotta da A a γ . Sia H il punto medio della corda intercettata su γ dalla secante.

- a) Si calcoli, in funzione dell'angolo $x = \widehat{AOH}$, il volume $V(x)$ del cono, che si ottiene ruotando il triangolo $\triangle AHO$ attorno alla retta OH .
- b) Si calcolino i valori dell'angolo x per cui $V(x)$ è massimo.
- c) Si studi la funzione $V(x)$ nei limiti geometrici del problema.
- d) Si discuta il problema della determinazione dei valori di x per cui $V(x)$ assume un assegnato valore k reale positivo. Si determini infine l'area delimitata dalla funzione e l'asse x nell'intervallo di studio.

La durata della prova è di 6 ore e nel corso di essa è consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula prima del termine della 4° ora di lezione

QUESTIONARIO -

1. Verificare che la funzione $y = \operatorname{sen}x + x - 4$ ammette un solo zero; determinarne poi un'approssimazione alla seconda cifra decimale e l'area compresa tra il grafico della funzione e gli assi cartesiani.
2. Due urne contengono 30 biglie blu e 15 rosse la prima e 20 biglie blu e 40 rosse la seconda. Si estraggono contemporaneamente 2 biglie dalla prima urna e una dalla seconda. Calcolare la probabilità che
 - a) siano tutte blu
 - b) siano tutte dello stesso colore
 - c) almeno una sia rossa

3. La variabile casuale X ha la seguente funzione di densità

$$f(x) = ax^2 - 8ax + 16a \quad 1 \leq x \leq 3 \quad a \in \mathfrak{R}$$

determinare il valore di a corrispondente e la funzione di ripartizione, calcolare il valore medio e la moda.

4. In un riferimento cartesiano ortogonale si consideri la curva piana γ di equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos^2 t + \operatorname{sen}2t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si determini l'equazione cartesiana di γ e si verifichi che essa è esplicitabile rispetto a y .

5. Sia data la funzione $F(x) = \int_0^x te^{-t^2} dt$ con $x \in \mathfrak{R}$, definire le proprietà di $F(x)$ ed il

significato geometrico, si dimostri poi che gli integrali $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$ e $\int_0^{-\infty} te^{-t^2} dt$ sono convergenti calcolandone il valore.

6. Per quali valori di c il polinomio $p(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ ha due minimi? Per quali valori ha due punti di flesso? Per quali nessuno? Come cambia il grafico quando c decresce?

7. Calcolare con il metodo più opportuno un valore approssimato dell'integrale $\int_{-2}^2 e^{-x^2} dx$

8. Data $y = \sqrt{4 - |x|}$, determinare gli eventuali punti di non derivabilità e scrivere le equazioni delle tangenti in tali punti. Rappresentare graficamente la funzione.

9. La corrente che percorre una resistenza R varia nel tempo secondo la legge $i = \frac{t}{t^2 + 1}$.
Dopo aver espresso la potenza dissipata in R in funzione del tempo t , stabilire in quale istante la potenza dissipata è massima.

10. Trovare il volume massimo di un cono circolare inscritto in una sfera di raggio r .

La durata della prova è di 6 ore e nel corso di essa è consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula prima del termine della 4° ora di lezione